755. 大數ノ法則, IV

北川 敏男(阪大)

§3. Liapounoff ノ定理ニ關スル Lindeberg-Lévy ノ

ノ方法（續キ）　次ニ吾々ハ條件（C_1）ガ假定サレテナイ場合ヲ論ズル。

コノ時ニハ，$\sigma_\nu^2 \equiv E_{\nu-1}\{X_\nu\}$ ハ，$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{\nu-1}$ ノトル値ニ從屬スル確率變數デアル。

今手始メトシテ、或ル $t>0$ ヲ與フルトキ、確率 0 ノ場合ヲノゾイテハ、次ノ二ツノ何レカガ起ルトスル：

(i) $\sum \sigma_\nu^2$ ハ發散スル；　(ii) $\sum \sigma_\nu^2$ ハ收斂シテ而モ $\geqq t$. コノ假定ノモトニ於テハ、確率 0 ノ場合ヲノゾイテハ

$$(1)\quad b_n^2 \equiv \sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots\cdots+\sigma_n^2 \geqq t$$

トナル樣ナ最小ノ自然數 n ガ存在スル。勿論、n ハ一般ニハ確率變數デアッテ、（C_1）ノ假定ノアル場合ノ如ク常數ニナルトハ限ラナイ。トモカク、n ヲカク定義スルトキニハ，

$$(2)\quad b_{n-1}^2 + c\sigma_n^2 = t$$

トナル樣ナ $0<c\leqq 1$ ガ存在スル。コヽニ c モ亦確率變數デアル。ソコデ Lévy ハ t ニ於ケル切斷（section）トシテ、上ノ c ヲ用キテ

$$(3)\quad S(t) = S_{n-1} + cX_n$$

ナルモノヲ導入シタ。[1] コノ思想ハ、聯鎖級數ヲ論ズル上ニ於テ、重要ナ役目ヲナス。以下ニ於テコレヲ示サウ。

吾々ハ先ヅ t ヲ固定シテノ結果ヲ先ヅ導カウトスルノデ

---

(1) Original. Lévy: Bulletin des Sciences Mathématiques, (1935) pp. 113　但シコヽデハ，專ラ Lévy ノ著書ニ負フ所ガ多イ。

アルカラ、便宜上$C=1$トシテモ一般性ヲ失ハレナイ。サテソノ約束ノモトデハ

定理4. 條件(C)ガ滿足サレ、且ツ$\mathfrak{S}(t)$ノ各項ガ絶對値ニ於テ$\varepsilon\sqrt{t}$ヲ超エナイナラバ、任意ノ實數xニ對シテ

$$(4)\quad \left|\Pr.\left\{\frac{\mathfrak{S}(t)}{\sqrt{t}}<x\right\}-\Pr.\left\{\xi<x\right\}\right|<6\varepsilon^{\frac{1}{4}}$$

注意: 吾々ノ規約ノモトデハ$b_n^2=t$デアルカラ、$\mathfrak{S}(t)$ノ各項ノ絶對値ガ$\varepsilon\sqrt{t}$ヲ超エナイトイフコトハ(C′)ニ外ナラナイ。但シ、コヽニ注意スベキコトハ定理3ニ於テハ、b_nハnノ函數デ一意ニキマッタモノデアルガ、上ノ定理デハ、b_nトnトノ關係ハ確率變數的デアルコトデアル。

證明: 常數λ, 確率變數λ, Z, ξヲバ, 定理3ノ證明デ用キタト同ジ意味ノモノトスル。先ヅ、吾々ハ

$$(5)\quad \left|\Pr.\left\{\frac{\mathfrak{S}(t)}{\sqrt{t}}+\lambda Z<x\right\}-\Pr.\left\{\xi+\lambda Z<x\right\}\right|<\frac{k\varepsilon}{2\lambda^3}$$

ヲバ示サウ。コレガ出來レバ, 定理3ノ證明デ用キタト同ジ方法ニヨリ、(4)ナル不等式ガ得ラレルカラ。

前回第169号、p. 679下カラ8行目ニ得タ不等式ハ, 今ノ場合$b_n^2=t=1$ト$\nu\leqq n$トシテ成立ツ。今ノ場合nガ確率變數トイフコトハ, コノ證明ニ影響シナイ。又$\nu>n$ニ對シテハ$\mathfrak{X}_\nu=\sigma_\nu=0$トオク。然ルトキニハ同樣ナ關係ガスベテノ$\nu$ニ關シテ成立ツ。

$$\mathfrak{U}_\nu=S_\nu+\sum_{\nu'=\nu+1}^{\infty}\sigma_{\nu'}\xi_{\nu'}$$

ト置カウ。ソコデ n ガ上限デアルトイフコトハ、モハヤ何等ノ意味ヲモタナイ。$\nu \geqq n$ ニ對シテハ常ニ

$$\mathfrak{U}_\nu = S_n = \mathfrak{S}(t)$$

又ヲバ $x - \mathfrak{S}_{\nu-1}$ デ置キカヘルコトニ依リ、次ノ結果ヲウル。

$$(6) \quad \left| Pr.\{\mathfrak{U}_\nu + Z < x\} - Pr.\{\mathfrak{U}_{\nu-1} + Z < x\} \right| \leqq k'\varepsilon E\{\sigma_\nu^2\}$$

依ッテ

$$(7) \quad \left| Pr.\{\mathfrak{S}(t) + Z < x\} - Pr.\{\xi + Z < x\} \right| \leqq k'\varepsilon E\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\sigma_\nu^2\right\}$$

右辺ハ $k'\varepsilon$ ニ等シイ。

以上ニ於テハ $t=1$ トシタガ、一般ノ t ニ對シテハ $\mathfrak{S}(t)$ ヲバ $\mathfrak{S}(t)/\sqrt{t}$ デ置キ換ヘテ考ヘレバヨイ。又 Z ヲバ $\lambda Z\ (\lambda>0)$ デオキカヘルト、(7) デ k' ハ k'/λ^2 デオキカワル。コレカラ (5) ヲ得ル。コレデ吾々ノ目的從ッテ定理4ノ証明ガ出來タ。〔証明終〕

更ニ進ンデ吾々ハ $\mathfrak{S}(t)$ ノ $t\to\infty$ ノトキノ漸近行動ヲ調ベテ見ヤウ。定理4カラ直チニ看取サレル事トシテ：

定理5. 聯鎖ナ確率変数ノ系列 $\{\mathfrak{X}_\nu\}$ ニ對シテ、次ノ三ツノ條件ガ満足サレテ居ルトスル：

(i) 條件(C)ガ成立ツ。

(ii) 確率変数列 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\sigma_\nu^2$ ノ発散スル確率ガ1デアル。

(iii) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\sigma_{\nu,0}^2 = \infty$ トナル様ナ $\{\sigma_\nu\}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ ノ値ノ數列 $\{\sigma_{\nu,0}\}$ $(\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$ ニ對シテハ、$n(t)$ ヲ

バ，$\sigma^2_{1,0}+\sigma^2_{2,0}+\cdots\cdots+\sigma^2_{n,0}\geqq t$ ヲ満足スル最小ノ自然数トスルトキ，次ノヤウナ t ノ函数 $\varepsilon(t)$ ヲバ，$\{\sigma_{\nu,0}\}$ ニ従属シテ撰ブコトガ出来ル：

(α) $|X_\nu|<\varepsilon(t)\sqrt{t}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots,n(t))$

(β) $\lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t)=0$

然ル時ニハ，スベテノ実数 x ニ対シテ

$$\lim_{t\to\infty}\Pr.\left\{\frac{S(t)}{\sqrt{t}}<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

然ラバ上ノ定理デ仮定(ii)ノナイ場合ハ如何，次ニコレヲ研究シヤウ。

今略シテ、$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sigma^2_\nu$ ガ収斂スルトイフ事象ヲバ，Aデ表ハスコトニスル。$\Pr.\{A\}=0$ ガ上ニ考ヘタ場合デ、ソレハ済ンデ居ル。$\Pr.\{A\}=1$ ノ場合ハ，問題ニナラナイ。依ッテ以下ニ於テハ，$0<\alpha\equiv\Pr.\{A\}<1$ トシテ議論ヲスヽメル事ニスル。又 $\beta=1-\alpha$ トオク。

サテ、$\sum\limits_{1}^{\infty}\sigma^2_{\nu,0}>t^2$ トナル様ナ $\{\sigma_{\nu,0}\}$ デナケレバ，$b^2_{n,0}\geqq t^2$ トナル $n(t)$ ハアリ得ナク、従ッテ $S(t)$ ハ存在シ得ナイ。$S(t)$ ガ存在シテコソ、問題ハ起ルノデアルカラ、$\sum\sigma^2_\nu>t$ ナル事象ガ起ッタトシテ、ソノ條件ノモトデノ $S(t)$ ノ條件付確率分布ヲ調ベルコトガ先ヅ以テ問題トナル。

先ヅ次ノ事柄ニ注意シヨウ：

(i) $\sum\sigma^2_\nu>t$ トナル確率ヲ $\beta'(t)$ トスルト $\beta'(t)\geqq\beta$，且ツ、$t\uparrow\infty$ ノトキ、$\beta'(t)\downarrow\beta$. 従ッテ、$\varepsilon'>0$ ヲ任意ニ與ヘルトキ，充分大ナル $t_0(\varepsilon')$ ヲトレバ，$t\geqq t_0(\varepsilon')$ ノ

トキニハ常ニ $1>\beta/\beta'(t)>1-\frac{\varepsilon'}{2}$ ナラシメ得ル。

以下、一般ニ、$S(t)$ ガ定義サレテ居ルトイフ條件ノモトニ於ケル確率ヲ $\overline{Pr}^t$ デ示スコトニスル。一般ニ G, K ナル事象ガ共ニ起ル確率ヲ $Pr.\{G, K\}$ デ、又 G ガ起ツタトイフ條件ノモトニ K ノ起ル確率ヲ $Pr.\{K/G\}$ デ示ス。

(ii) $t \geqq t'(\varepsilon_0)$ ノトキニハ，$\overline{Pr}^t\{A\} < \varepsilon'/2$ ((i)ニ依ル)

(iii) E ハ，$\overline{Pr}^t_\nu\{A\} \geqq 1/2$ トナル ν ガ少ナクモ一ツ存在スル事象トシ，e_p ハ $\overline{Pr.}^t_\nu\{A\} \geqq 1/2$ トナル事象ガ $\nu=n$ ニ於テ始メテ成立スル事象トスル。然ルトキニハ

(1°) e_p ($p=1, 2, 3, \cdots\cdots$) ハ相互ニ排反デアツテ

$$\sum e_p = E$$

(2°)
$$\overline{Pr}^t\{A/E\} = \sum_{p=1}^{\infty} \overline{Pr.}^t\{A/e_p\}\,\overline{Pr.}^t\{e_p/E\}$$

$$\geqq \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} \overline{Pr}^t\{e_p/E\}$$

依ツテ $\overline{Pr}^t\{A E\} \geqq \frac{1}{2}$

(iv) $\overline{Pr}^t\{E\}\,\overline{Pr}^t\{A/E\} = \overline{Pr}^t\{A, E\} \leqq \overline{Pr}^t\{A\}$

以上ノ (ii), (iii) ノ 2°, (iv) ヲ一共ニシテ

(8) $\overline{Pr}^t\{E\} < \varepsilon'$ $\quad (t \geqq t(\varepsilon')$ ノトキ$)$

ナル關係式ヲ得ル。

然ルニ、A ガ實現サレルナラバ，$\overline{Pr}^t_\nu\{A\}$ ハ $\nu \to \infty$ ノトキ 1 ニ收斂シナケレバナラヌ。從ツテソノトキニハ，E ガ實現シナケレバナラヌ。

然ルニ、實ハ (8) ガ成立スルノデアル。依ツテ次ノコトガ云ハレル：$\mathfrak{S}(t)$ ガ定義サレテ且ツ $\overline{\Pr}^t\{A\} < \varepsilon'/2$ ナルトキニハ，確率ガ ε' ヲ超エナイ場合ヲ除イテハ，A ガ起ラナイ。

A ガ起ラナイ場合、即チ $\sum \sigma_\nu^2$ ガ發散スル場合ハ既ニ論ジタ。以上ノ考察カラ、吾々ハ次ノ定理ヲ導クウ：

定理6. 前定理ノ假定ノウチデ、(i), (iii) ノミヲ假定シ、(ii) ハ假定シナイトスル。ソシテ $\sum \sigma_\nu^2$ ノ發散スル確率ヲ β トシ、H_t ハ t ニ對シテ $\mathfrak{S}(t)$ ガ定義サレテ居ルトイフ事象ヲ意味スルトスル。然ル時ニハ

$$(9) \quad \lim_{t\to\infty} \Pr.\left\{H_t, \frac{\mathfrak{S}(t)}{\sqrt{t}} < x\right\} = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

証明： $\beta = 0$ ナラバ自明デアル。依ツテ $\beta > 0$ ノ場合ヲ問題ニスレバヨイ。$\beta = 1$ ノトキハ前定理ニ外ナラナイ。依ツテ以下デハ $0 < \beta < 1$ トスル。上述ニヨリ、$\varepsilon' > 0$ ヲ任意ニ與フルトキ，$t_0(\varepsilon')$ ガ存在シテ、$t \geqq t_0(\varepsilon')$ ナル各 t ニ對シテ、$\overline{\Pr}^t\{A\} > \varepsilon'/2$ トナリ、確率 ε' ノ場合ヲノゾイテハ、A ハ起ラナイ。

A ガ起ラナイ場合，即チ C (A) ノ起ル場合ニハ、$\{\sigma_\nu\}$ ナル確率変數列ハ，$\sum \sigma_{\nu,0}^2 = \infty$ トナルヤウナ値ノ列 $\{\sigma_{\nu,0}\}$ ヲトル。コレニ對シテハ，前定理ノ假定 (iii) ニ依リ、$\varepsilon(t)$ ガ決定サレル。ソコデ、既ニ得タ結果ヲ利用スルト

$$(10) \quad \left|\Pr'\{\mathfrak{S}(t) < x\sqrt{t}\} - \Pr.\{\xi < x\}\right| < 6\sqrt[4]{\varepsilon(t)} + \varepsilon'$$

ヲ得ル。但シ，茲ニ Pr' ハ「$\mathfrak{S}(t)$ が定義サレテ而モソレが $x\sqrt{t}$ ヨリ小ナル確率」ヲモ或ハ又「$\mathfrak{S}(t)$ が定義サレルナラバ，ソレが $x\sqrt{t}$ ヨリ小ナル確率」ヲモ意味スルモノトスル。コノ不等式カラ求メル結果ヲウルコトハ容易デアル。